

Die affiene invariansie en lynsimmetrieë van die kegelsnedes

Michael de Villiers, Departement Wiskunde-onderwys, Universiteit Durban-Westville, Durban 4000

Hierdie artikel bespreek 'n aantal interessante affiene eienskappe van die kegelsnedes wat nie algemeen in standaard handboeke verskyn nie. Dit kan veral van nut wees as 'n verdere uitbreiding van die werk wat tans onder kegelsnedes in die Addisionele Wiskunde kursus voorgeskryf word. Na die mening van die skrywer behoort dit ook sterk oorweeg te word vir insluiting by die voorgraadse opleiding van wiskunde-onderwysers.

Inleiding

In die vorige *Pythagoras* het Baart (1992:42) 'n pleidooi gelewer vir die insluiting van, onder andere, transformasie meetkunde in die voorgraadse opleiding van wiskunde-onderwysers. Dit is miskien veral van belang aangesien die nuwe junior sekondêre sillabus 'n informele bekendstelling aan die isometrieë insluit. Hierdie artikel bespreek 'n aantal interessante affiene eienskappe van die kegelsnedes wat 'n goeie voorbeeld verskaf van die krag en nut van transformasies. Dit is toevallig deur die skrywer ontdek terwyl hy aan 'n reeks artikels oor transformasie meetkunde gewerk het (De Villiers, 1989, 1990, 1992, in press (a)).

In teenstelling met die isometriese en gelykvormige transformasies waar respektiewelik die *kongruensie* en *vorm* van getransformeerde figure behoue bly, bly hoekgroottes en lengtes (en verhoudings tussen hulle) nie in die algemeen behoue by affiene transformasies nie. Onder 'n affiene transformasie bly die volgende eienskappe van 'n vlakfiguur invariant (onveranderd):

- die saamval en snyding van ooreenstemmende punte en lyne
- die samelopendheid van ooreenstemmende lyne
- die ko-lineariteit van ooreenstemmende punte
- die parallelisme van ooreenstemmende lyne
- die verhouding waarin 'n ooreenstemmende punt 'n ooreenstemmende lynstuk verdeel

Byvoorbeeld, deur die spesiale affiene transformasies *rekking* (*stretch*) en *dwarsdrukking* (*shear*) te gebruik, kan ons 'n vierkant na reghoek, ruit of parallelogram transformeer, maar nie na 'n algemene trapesium of vlieër nie. 'n Vierkant is dus nie 'n affiene invariant nie, maar 'n parallelogram is, aangesien die parallelisme van oorsaande sye behoue bly.

Die affiene invariansie van reguit lyne

'n Standaard oefening is om te bewys dat reglynigheid behoue bly onder affiene transformasies, d.w.s. die invariansie van reguit lyne. Dit kan maklik soos volg ge-

doen word. Beskou die algemene vergelyking vir 'n reguit lyn, naamlik $y = mx + c$, en die algemene formules vir 'n affiene transformasie, naamlik $x' = dx + ey + f$ en $y' = gx + hy + i$ waar $dh - eg \neq 0$. Deur x en y op te los in terme van x' en y' verkry ons:

$$(1) x = \frac{-hx' + ey' - ei + fh}{eg - dh}$$

$$(2) y = \frac{gx' - dy' + di - gf}{eg - dh}$$

Deur die instelling van bogenoemde in die vergelyking van 'n reguit lyn verkry ons:

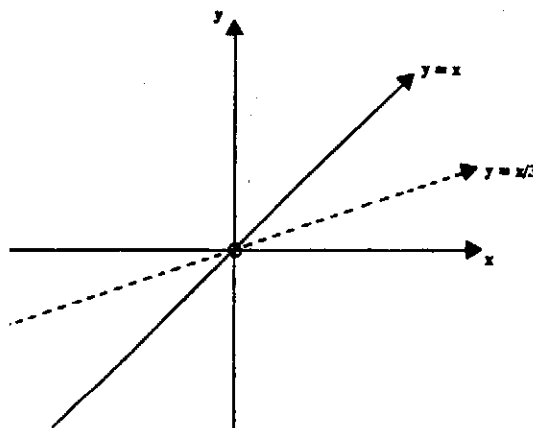
$$\frac{gx' - dy' + di - gf}{eg - dh} = m \left(\frac{-hx' + ey' - ei + fh}{eg - dh} \right) + c$$

wat vereenvoudig kan word na die standaard vorm:

$$y' = M'x' + C'$$

waar M' en C' uitgedruk kan word in terme van die konstantes c, d, e, f, g, h en i . Dit voltooi dan die bewys van die algemene resultaat.

Figuur 1 toon byvoorbeeld die effek van die affiene transformasie gedefinieer deur $x' = 2x + y$ en $y' = y$ op die reguit lyn $y = x$.

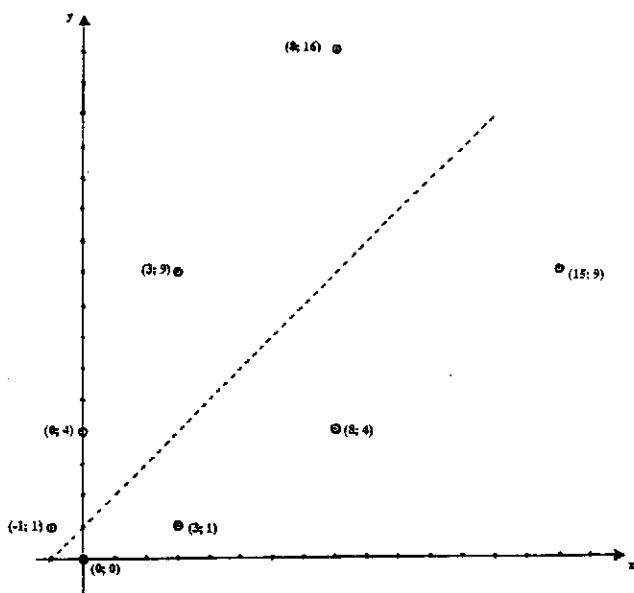


Figuur 1

Die affiene invariansie van die kegelsnedes

Kom ons ondersoek nou wat met 'n standaard parabool $y = ax^2 + bx + c$ onder affiene transformasies gebeur. Soos byvoorbeeld in De Villiers (1990) genoem, veroorsaak 'n rekking (*stretch*) van $y = x^2$ in die x - of y -rigtings slegs vergrotings of verkleinings, met ander woorde gelykvormige parabole word verkry van die vorm $y = ax^2$. Maar wat van 'n algemene affiene transformasie? Wat sal ons verkry?

Kom ons beskou die transformasie van $y = x^2$ onder die bogenoemde affiene transformasie $x' = 2x + y$ en $y' = y$. Deur weereens vir x en y op te los in terme van x' en y' en dit in $y = x^2$ in te stel verkry ons die getransformeerde vergelyking $x'^2 - 2x'y' + y'^2 - 4y' = 0$. Om hierdie vergelyking grafies voor te stel beskou ons slegs punte op die oorspronklike grafiek en kyk wat met hulle onder die gegewe transformasie gebeur. Byvoorbeeld, die punt $(1;1)$ word afgebeeld op $x' = 2(1) + 1 = 3$ en $y' = 1$, dit wil sê die punt $(3;1)$. Figuur 2 toon 'n aantal punte op die getransformeerde vergelyking wat skynbaar in die vorm van 'n parabool lê met 'n as van simmetrie $y = x + 1$. Is dit altyd waar? Sal ons altyd 'n parabool kry?



Figuur 2

Kom ons beskou nog 'n paar voorbeelde. Deur die affiene transformasie $x' = x - y$ en $y' = x + y$ op $y = x^2$ te gebruik verkry ons die getransformeerde vergelyking $x'^2 + 2x'y' + y'^2 + 2x' - 2y' = 0$ wat ook in die vorm van 'n parabool lê soos in Figuur 3 getoon (met 'n as van simmetrie $y = -x$). Soortgelyk deur $x' = -2x + y/2 + 1$ en $y' = x + y - 2$ op $y = x^2$ te gebruik, verkry ons

$$4x'^2 - 4x'y' + y'^2 - 26x' - 12y' - 14 = 0$$

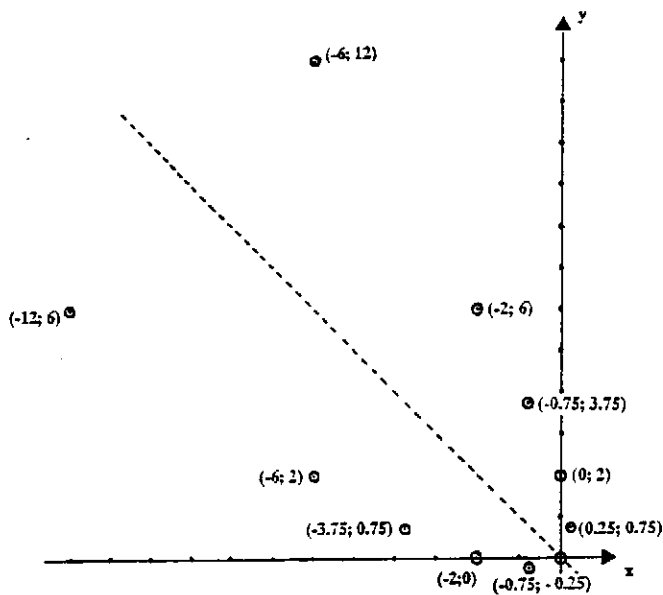
wat ook skynbaar in die vorm van 'n parabool lê soos in Figuur 4 getoon. Let op dat die simmetrie-as die x -as by $(2;0)$ sny en deur die punt $(1;-2)$ gaan, met ander woorde dit het die vergelyking $y = 2x - 4$.

Hoe kan ons hierdie waarnemings bewys, naamlik die hipotese dat enige affiene transformasie van $y = ax^2 + bx + c$ altyd 'n parabool lewer? Hiervoor is dit nodig om die algemene voorstelling van 'n kegelsnit in die vlak naamlik $px^2 + 2qxy + ry^2 + 2sx + 2ty + u = 0$ te beskou. Hierdie vergelyking stel 'n parabool voor as $q^2 - pr = 0$, 'n ellips as $q^2 - pr < 0$ en 'n hiperbool as $q^2 - pr > 0$. Let wel dat dit 'n sirkel voorstel as $p = r$ en $q = 0$,

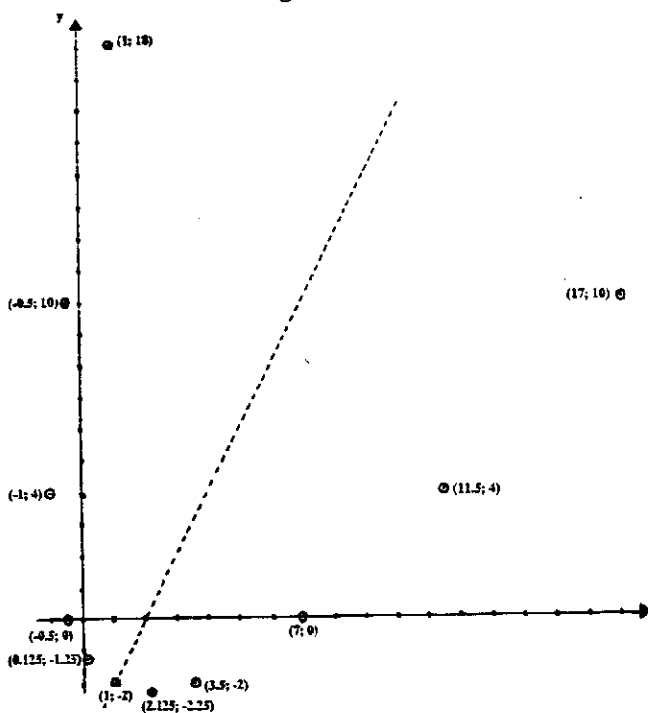
en 'n reghoekige hiperbool as $p + r = 0$. ('n Bewys vir hierdie diskriminerende voorwaardes word in Fishback (1969:215-217) verskaf).

Deur vergelykings (1) en (2) in die vergelyking van 'n standaard parabool $y = ax^2 + bx + c$ in te stel verkry ons die getransformeerde vergelyking:

$$ah^2x'^2 - 2aehx'y' + ae^2y'^2 + 2Sx' + 2T'y' + U = 0$$



Figuur 3



Figuur 4

Aangesien $(-aeh)^2 - (ah^2)(ae^2) = 0$ verteenwoordig hierdie vergelyking dus 'n parabool. Hierdie resultaat dui ook op 'n verdere veralgemening naamlik dat enige parabool $px^2 + 2qxy + ry^2 + 2sx + 2ty + u = 0$ en $q^2 - pr = 0$ 'n affiene invariant is. In hierdie geval verkry ons die getransformeerde vergelyking:

$$(ph^2 - 2qhg + rg^2)x'^2 + 2(qeg + qhd - hep - gdr)x'y' + (pe^2 - 2qed + rd^2)y'^2 + 2Sx' + 2Ty' + U = 0$$

Die diskriminerende voorwaarde word nou gegee deur:

$$(qeg + qhd - hep - gdr)^2 - (ph^2 - 2qhg + rg^2) \times (pe^2 - 2qed + rd^2)$$

wat vereenvoudig na:

$$q^2e^2g^2 + q^2h^2d^2 + 2hepgdr - prh^2d^2 - 2q^2hgcd + rpg^2e^2$$

Aangesien $q^2 = pr$ in die geval van 'n parabool, kan ons pr deur q^2 vervang in die derde, vierde en vyfde terme van die uitdrukking hierbo sodat dit na 0 vereenvoudig, en dus die affiene invariënsie van parabole aantoon. Soortgelyk, as ons 'n ellips het, kan ons pr met $q^2 + k$ vervang waar $k > 0$ sodat die uitdrukking na $-k(hd - ge)^2$ vereenvoudig. Aangesien die waarde daarvan altyd negatief is, is die getransformeerde vergelyking dié van 'n ellips en bewys dit die affiene invariënsie van ellipse. Op soortgelyke wyse kan ons die affiene invariënsie van hiperbole bewys, maar dit word as 'n oefening aan die leser oorlaat.

Die affiene ekwivalensie van die kegelsnedes

'n Standaard oefening in transformasie meetkunde is om te bewys dat enige kegelsnit vereenvoudig kan word na 'n ooreenstemmende kanoniese (eenvoudiger) vorm met behulp van geskikte transformasies. Byvoorbeeld, enige parabool kan vereenvoudig word na $x^2 + y = 0$, enige ellips (uitsluitend imaginêre gevalle) na $x^2 + y^2 = 1$ en enige hiperbool na $x^2 - y^2 = 1$.

Dit kan op 'n verskeidenheid wyses gedoen word. Fishback (1969) gebruik byvoorbeeld 'n kombinasie van affiene en isometriese transformasies. Aan die ander kant hoef ons slegs isometriese transformasies te gebruik, naamlik 'n rotasie en 'n translasie, en 'n refleksie om $y = x$ indien nodig, om enige parabool na $ax^2 + y + c = 0$, enige ellips na $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ en enige hiperbool na $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$ te reduceer (vergelyk Pettofrezzo, 1966). Laasgenoemde vorme kan egter soos volg nog verder vereenvoudig word. Byvoorbeeld, die gegewe parabool kan maklik na $x^2 + y = 0$ gereduseer word deur 'n translasie om c te elimineer en 'n vergroting van a vanuit die oorsprong (kyk De Villiers, 1990). Om die gegewe ellips en hiperbool na die vorme $x^2 + y^2 = 1$ en $x^2 - y^2 = 1$ te reduceer word 'n affiene rekking van $x' = x$ en $y' = ay$, gevolg deur 'n vergroting van $x' = x/a$ en y'

$= y/a$ benodig.

Aangesien elke kegelsnit na kanoniese vorm met behulp van 'n geskikte kombinasie van affiene transformasies (insluitend die isometrieë en gelykvormighede) gereduseer kan word, is dit moontlik om enige twee gevalle van 'n spesifieke kegelsnit op mekaar af te beeld met 'n geskikte kombinasie van affiene transformasies. (Byvoorbeeld, indien nodig, kan 'n mens die een na kanoniese vorm reduceer, en dan die inverse transformasies waarmee die ander een na kanoniese vorm gereduseer sou word, daarop toe te pas om dit sodoende op die ander een af te beeld). Ons kan dus sê dat die individuele kegelsnedes almal affien ekwivalent aan mekaar is.

Verder aangesien soos hierbo beskryf, enige parabool op enige ander parabool afgebeeld kan word deur slegs isometrieë en gelykvormighede te gebruik, verkry ons die sterker resultaat dat alle parabole gelykvormig is. (Let wel dat ellipse en hiperbole nie individueel gelykvormig is nie, aangesien affiene transformasies benodig word om hulle na kanoniese vorm te reduceer). Merk ook op dat dit nie moontlik is om een kegelsnit, byvoorbeeld 'n parabool, na 'n ander, byvoorbeeld 'n ellips, te transformeer nie. Daarvoor word projektiewe transformasies benodig en kan dit bewys word dat al die kegelsnedes projektief ekwivalent aan mekaar is.

'n Mens moet versigtig wees om nie die verskillende konsepte invariënsie en ekwivalensie met mekaar te verwar nie. Die feit dat 'n spesifieke versameling figure invariant is onder sekere transformasies beteken nie noodwendig dat al die figure van daardie versameling ekwivalent is onder daardie transformasies nie. Byvoorbeeld, elke affiene transformasie beeld 'n konvekse vierhoek op 'n ander konvekse vierhoek af, dit wil sê 'n konvekse vierhoek is 'n affiene invariant. Dit is egter nie waar dat enige twee konvekse vierhoeke affien ekwivalent aan mekaar is. Byvoorbeeld, 'n parallelogram kan nie met affiene transformasies afgebeeld word op 'n vierhoek met slegs een paar oorsaande sye parallel. Omgekeerd, impliseer ekwivalensie ook nie noodwendig invariënsie nie. Byvoorbeeld, alle reghoeke is affien ekwivalent aangesien hulle op mekaar afgebeeld kan word met behulp van geskikte rekkings, maar 'n reghoek is nie 'n affiene invariant nie, aangesien 'n dwarsdruk dit byvoorbeeld op 'n parallelogram kan afbeeld.

Die linsimmetrieë van die kegelsnedes

Hoe kan ons die linsimmetrieë van parabole, ellipse en hiperbole in die algemeen vind? Is dit moontlik om algemene vergelykings af te lei?

Kom ons beskou eerstens 'n algemene parabool gedefinieer deur $px^2 + 2qxy + ry^2 + 2sx + 2ty + u = 0$ en $q^2 = pr$. Na 'n rotasie van die grafiek om die oorsprong gegee deur $x' = \cos \theta x - \sin \theta y$ en $y' = \sin \theta x + \cos \theta y$ waar $\theta = \frac{1}{2} \arctan [(2q/(r-p))]$ verkry ons een van die volgende twee getransformeerde vergelykings (waarvan die getoonde voorwaardes maklik deur die

beskouing van 'n paar spesiale gevalle volg):

$$(3) (p+r)x'^2 + 2(s\cos\theta - t\sin\theta)x' + 2(ssin\theta + t\cos\theta)y' + u = 0$$

... as $|r| < |p|$ of $r = p < 0$

$$(4) (p+r)y'^2 + 2(s\cos\theta - t\sin\theta)x' + 2(ssin\theta + t\cos\theta)y' + u = 0$$

... as $|r| > |p|$ of $r = p > 0$

Vergelykings (3) en (4) is slegs standaard parabole met vertikale en horisontale lyne van simmetrie gegee deur die respektiewe vergelykings:

$$x' = -\frac{s\cos\theta - t\sin\theta}{p+r}$$

$$y' = -\frac{s\sin\theta + t\cos\theta}{p+r}$$

Aangesien 'n rotasie 'n isometrie is, is die bogenoemde parabole met hulle respektiewe lyne van simmetrie kongruent aan die oorspronklike. Om dus algemene vergelykings vir die lynsimmetrie van parabole te vind, hoef ons dus slegs bogenoemde vertikale of horisontale lyne van simmetrie na hulle oorspronklike posisies terug te roteer deur die volgende transformasies te gebruik:

$$x = x\cos(-\theta)x' - \sin(-\theta)y'$$

$$y = \sin(-\theta)x' + \cos(-\theta)y'$$

Deur x' en y' in terme van x en y op te los en in bogenoemde vergelykings in te stel, verkry ons:

$$\cos(-\theta)x + \sin(-\theta)y = -\frac{s\cos\theta - t\sin\theta}{p+r}$$

$$-\sin(-\theta)x + \cos(-\theta)y = -\frac{s\sin\theta + t\cos\theta}{p+r}$$

wat na die volgende vergelykings vir die lynsimmetrie van 'n parabool vereenvoudig:

$$(5) y = \cot\theta x + \frac{s\cot\theta - t}{p+r} \dots |r| < |p| \text{ of } r = p < 0$$

$$(6) y = -\tan\theta x - \frac{s\tan\theta + t}{p+r} \dots |r| > |p| \text{ of } r = p > 0$$

Let op dat $\theta = \frac{1}{2} \arctan [2q/(r-p)]$ die hoek is tussen die lynsimmetrie en die y - of x -asse, respektiewelik afhanklik van die voorwaardes in vergelykings (5) en (6). Verder volgens standaard konvensie impliseer $\theta > 0^\circ$ antikloksgewyse rotasie en $\theta < 0^\circ$ kloksgewyse rotasie. Let ook op die beperking dat $\theta \neq 0^\circ$ in vergelyking (5), aangesien ons deur $\sin\theta$ moes deel om dit te verkry. (In die geval wanneer $\theta = 0^\circ$ is $q = 0$ en die simmetrie-as is dan eenvoudig $x = -s/p$). Geen beperking is egter nodig in vergelyking (6) aangesien die gebied van θ gegee word deur $-45^\circ \leq \theta \leq 45^\circ$.

Kom ons beskou nou 'n paar voorbeelde. Beskou

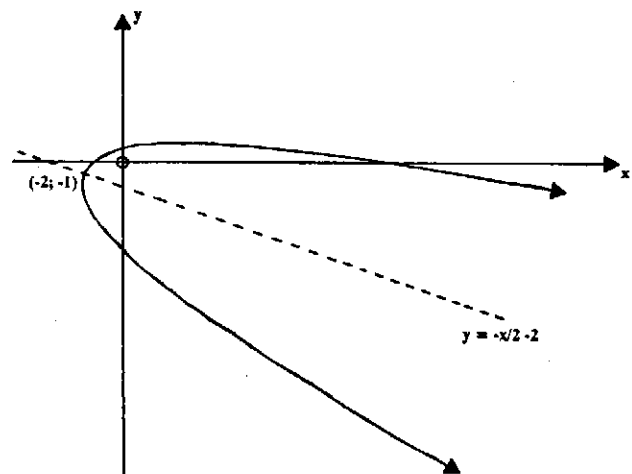
eerstens die parabool in Figuur 4, naamlik

$$4x^2 - 4xy + y^2 - 26x - 12y - 14 = 0.$$

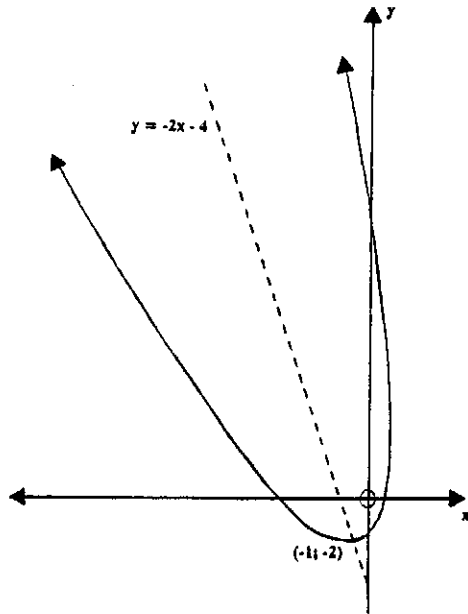
Hier het ons $\theta = \frac{1}{2} \arctan [2(-2)/(1-3)] = 26,565^\circ \dots$ Aangesien $|r| < |p|$ bepaal ons $\cot\theta = 2$ en stel dit saam met p, r, s en t in formule (5) in om $y = 2x - 4$ te verkry. Soortgelyk volg vir die parabool $x^2 + 2xy + y^2 + 2x - 2y = 0$ in Figuur 3 dat $\theta = 45^\circ$ en aangesien $r = p > 0$ substitueer ons in vergelyking (6) om $y = -x$ as die simmetrie-as te verkry. Vir die parabool $x^2 - 2xy + y^2 - 4y = 0$ in Figuur 2 is $\theta = -45^\circ$ en aangesien $r = p > 0$ substitueer ons ook in vergelyking (6) om $y = x + 1$ as die simmetrie-as te verkry. Dit word nou as 'n oefening aan die leser oorgelaat om te toon dat $y = -\frac{1}{2}x - 2$ die simmetrie-as van die parabool $x^2 + 4xy + 4y^2 - 12x + 26y - 14 = 0$ is.

Ons kan nou maklik 'n ruwe skets van laasgenoemde parabool maak deur die rigting waarin sy "arms" lê te beskou. Van vergelyking (4) kan ons sien dat 'n algemene parabool met $|r| > |p|$ of $r = p > 0$ respektiewelik in die positiewe of negatiewe x -rigting sal lê wanneer die kwosient $-(p+r)/(s\cos\theta - t\sin\theta)$ positief of negatief is. Aangesien $\theta > 0^\circ, s < 0$ en $t > 0$ vir laasgenoemde parabool volg dit dat die kwosient positief is en kan ons 'n ruwe skets daarvan teken soos in Figuur 5 getoon. Op soortgelyke wyse kan ons aflei dat 'n parabool met $|r| < |p|$ of $r = p < 0$ in die positiewe of negatiewe y -rigting respektiewelik sal lê wanneer die kwosient $-(p+r)/(s\sin\theta + t\cos\theta)$ positief of negatief is. Byvoorbeeld, aangesien $y = -2x - 4$ die simmetrie-as van die parabool $4x^2 + 4xy + y^2 + 26x - 12y - 14 = 0$ en die laasgenoemde kwosient positief is, kan ons maklik die ruwe skets trek soos in Figuur 6 getoon. Verder om die x - en y -afsnitte te bepaal, stel ons $y = 0$ en $x = 0$ en los ooreenstemmend vir x en y op.

Om vergelykings te vind vir die koördinate van die draaipunt van 'n parabool in die algemeen, beskou ons eers die koördinate van die draaipunte van parabole (3) en (4), byvoorbeeld:



Figuur 5



Figuur 6

$$x_t' = \frac{-\alpha}{p+r} \text{ en } y_t' = \frac{\alpha^2 - u(p+r)}{2\beta(p+r)} \dots |r| < |p|$$

of $r = p < 0$

$$x_t' = \frac{\beta^2 - u(p+r)}{2\alpha(p+r)} \text{ en } y_t' = \frac{-\beta}{p+r} \dots |r| > |p|$$

of $r = p > 0$

waar $\alpha = s \cos \theta - t \sin \theta$ en $\beta = s \sin \theta + t \cos \theta$. Aangesien x_t' en y_t' die koördinate van 'n vaste punt is gebruik ons direk die transformasie

$$x_t = \cos(-\theta)x_t' - \sin(-\theta)y_t'$$

$$y_t = \sin(-\theta)x_t' + \cos(-\theta)y_t'$$

om die volgende formules vir die koördinate van die draaipunt van 'n parabool in die algemeen te vind:

$$(7) \quad x_t = \frac{-2\alpha\beta \cos \theta + [\alpha^2 - u(p+r)] \sin \theta}{2\beta(p+r)}$$

$$y_t = \frac{2\alpha\beta \sin \theta + [\alpha^2 - u(p+r)] \cos \theta}{2\beta(p+r)}$$

$$\dots |r| < |p| \text{ of } r = p < 0$$

$$(8) \quad x_t = \frac{-2\alpha\beta \sin \theta + [\beta^2 - u(p+r)] \cos \theta}{2\alpha(p+r)}$$

$$y_t = \frac{-2\alpha\beta \cos \theta - [\beta^2 - u(p+r)] \sin \theta}{2\alpha(p+r)}$$

$$\dots |r| > |p| \text{ of } r = p > 0$$

Byvoorbeeld vir die parabool in Figuur 6 is $\theta = -26,565^\circ$... sodat $\alpha = 8,944\dots$, $\beta = -11,180\dots$, $\alpha\beta = -100$ en $\alpha^2 = 80$. Deur instelling in formule 7 verkry ons die koördinate van die draaipunt soos volg:

$$x_t = \frac{-2(-100)(0,894\dots) + 150(-0,447\dots)}{10(-11,180\dots)}$$

$$= \frac{111,803\dots}{-111,803\dots} = -1$$

$$x_t = \frac{-2(-100)(0,447\dots) + 150(0,894\dots)}{10(-11,180\dots)}$$

$$= \frac{223,606\dots}{-111,803\dots} = -2$$

Dit word nou as 'n oefening aan die leser oorgelaat om te kontroleer dat die draaipunte van die parabole in Figure 2 tot 5 respektiewelik $(-0,75; 0,25)$, $(0;0)$, $(1; -2)$ en $(-2; -1)$ is.

Kom ons beskou nou die simmetrie-asse van ellipse en hiperbole in die algemeen. Na 'n rotasie van 'n ellips of 'n hiperbool om die oorsprong deur 'n hoek θ , verkry ons die volgende getransformeerde vergelyking:

$$(9) \quad \lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + 2\alpha x' + 2\beta y' + u = 0$$

waar α en β gedefinieer is soos in vergelykings (7) en (8) en λ_1 en λ_2 die oplossings is van die karakteristieke vergelyking

$$\lambda^2 - (p+r)\lambda + pr - q^2 = 0.$$

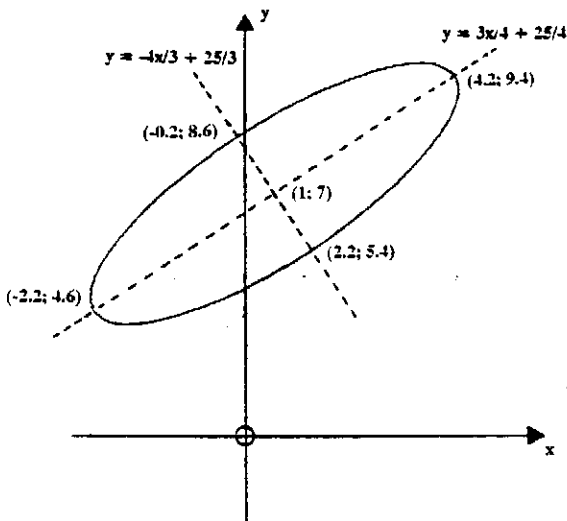
Vergelyking (9) is slegs 'n standaard ellips of hiperbool met twee simmetrie-asse $x' = -\alpha/\lambda_1$ en $y' = -\beta/\lambda_2$. Deur weereens hierdie lyne na hulle oorspronklike posisies terug te roteer, verkry ons respektiewelik die volgende vergelykings vir die simmetrie-asse:

$$(10) \quad y = \cot \theta x + \frac{s \cot \theta - t}{\lambda_1} \dots \theta \neq 0^\circ$$

$$(11) \quad y = -\tan \theta x - \frac{s \tan \theta - t}{\lambda_2}$$

Deur beskouing van spesiale gevalle volg dat as $|r| < |p|$ of $r = p < 0$ in die bostaande vergelykings dan is $|\lambda_1| > |\lambda_2|$, maar as $|r| > |p|$ of $r = p > 0$ is $|\lambda_1| < |\lambda_2|$. Verder, in teenstelling met die ellips of parabool, kan die hiperbool die eienskap hê dat $r = -p$ en dus dat $\lambda_1 = -\lambda_2$. In daardie geval, as $r \geq 0$ is $\lambda_1 < \lambda_2$, maar as $r < 0$ is $\lambda_1 > \lambda_2$.

Kom ons beskou nou 'n paar voorbeelde. Vir die ellips $52x^2 - 72xy + 73y^2 + 400x - 950y + 2725 = 0$ is $\theta = -36,869^\circ$... en $\lambda^2 - 125\lambda + 2500 = 0$. Aangesien $|r| > |p|$ volg dit dat $\lambda_1 = 25$ en $\lambda_2 = 100$ en deur substitusie in vergelykings (10) en (11) verkry ons die simmetrie-asse respektiewelik as $y = (-4/3)x + 25/3$ en $y = (3/4)x + 25/4$. Deur die twee gelyktydige vergelykings op te los verkry ons die senter van die ellips by $(1;7)$. Verder deur die afsonderlike substitusie van die twee vergelykings in die vergelyking van die ellips, verkry ons die koördinate van die snydings tussen die simmetrie-asse en die ellips soos in Figuur 7 getoon.



Figuur 7

Vir die hiperbool

$$x^2 - 10\sqrt{3}xy + 11y^2 + 4(\sqrt{3} + 12)x - 4$$

$$(12\sqrt{3} - 1)y + 156 = 0$$

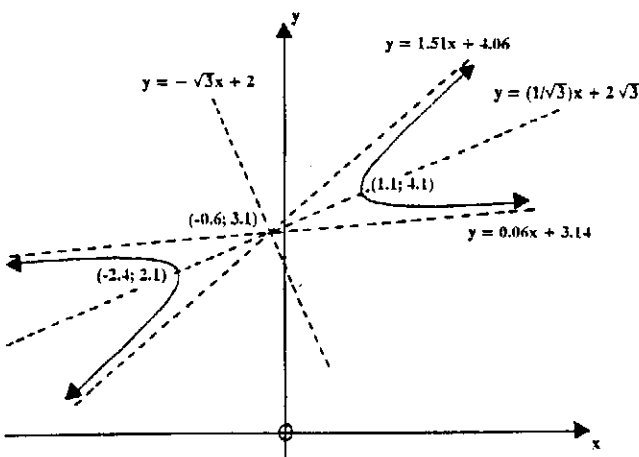
is $\theta = -30^\circ$ en $\lambda^2 - 12\lambda - 64 = 0$.

Aangesien $|r| > |p|$ moet $|\lambda_1| < |\lambda_2|$ en dus is $\lambda_1 = -4$ en $\lambda_2 = 16$. Dit gee dan vir ons die simmetrie-asse

$$y = -\sqrt{3}x + 2 \text{ en } y = (1/\sqrt{3})x + 2\sqrt{3}.$$

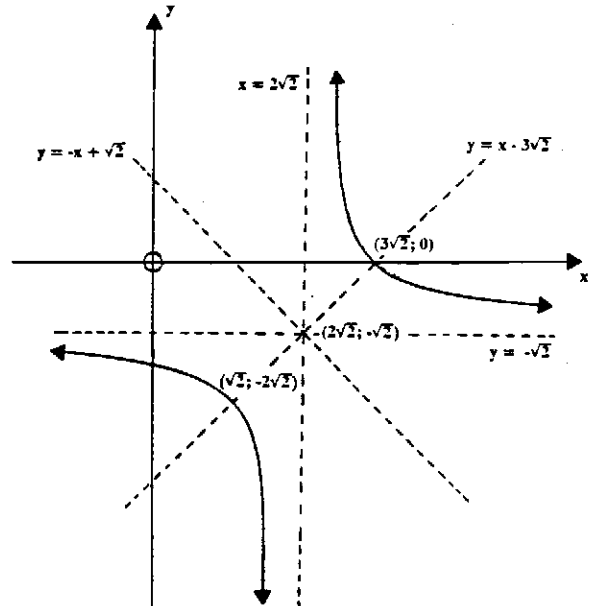
Soos voorheen verkry ons die grafiek in Figuur 8 met koördinate afgerond tot die eerste desimaal.

Algemene vergelykings vir die asimptote van 'n hiperbool kan ook verkry word deur die voorafgaande metodes te gebruik, maar dit word as 'n oefening aan die leser oorgelaat. Die asimptote van die hiperbool in Figuur 8 is $y = 1,51x - 4,06$ en $y = 0,06x + 3,14$ (koëffisiënte en konstantes tot 2 desimale afgerond).



Figuur 8

Vir die hiperbool $xy + \sqrt{2}x - 2\sqrt{2}y - 6 = 0$ is $\theta = 45^\circ$ en $\lambda^2 - 1/4 = 0$. Aangesien $r = 0$ moet $\lambda_1 < \lambda_2$ en dus $\lambda_1 = -1/2$ en $\lambda_2 = 1/2$. Dit gee dan vir ons die asse van simmetrie $y = x - 3\sqrt{2}$ en $y = -x + \sqrt{2}$. Soos voorheen verkry ons dus die grafiek in Figuur 9 met asimptote $x = 2\sqrt{2}$ en $y = -\sqrt{2}$.



Figuur 9

Slotopmerking

Hopelik het hierdie artikel nie net in sy doel geslaag om die krag van transformasies aan te toon nie, maar ook 'n bietjie lig te werp op die wyse waarop nuwe wiskunde soms ontdek/geskep word (en dus ook hoe dit soms aangebied behoort te word!). Byvoorbeeld, deur 'n induktiewe veralgemening vanaf 'n paar spesiale gevalle is eerstens 'n hipotese in verband met die affiene invariansie van die standaard parabool gevorm. Die deduktiewe verklaring daarvan het egter onmiddellik gelei tot die verdere veralgemening dat die algemene kegelsnede affiene invariante is. Op sy beurt het dit weer aanleiding gegee tot 'n ondersoek na vergelykings vir die linsimmetrie van die algemene kegelsnede. Hoewel laasgenoemde ondersoek hoofsaaklik deduktief van aard was, was die beskouing van spesiale gevalle nogtans nodig om die diskriminerende voorwaardes te identifiseer. Ons sien dus duidelik hierin hoedat deduktiewe en kwasi-empiriese denke mekaar in wiskunde komplementeer.

Ook moet daarop gewys word dat hoewel die konseptuele inhoud op 'n relatief elementêre vlak is, dit 'n heelwat hoër vlak van tegniese vaardigheid vereis. Met ander woorde, die grootste nadeel en potensiele struikelblok van die formele hantering van transformasie meetkunde lê nie soseer in *relasionele* begryping nie, maar in die *instrumentele* beheersing daarvan. (Raadpleeg Skemp, 1976 vir meer inligting oor dié twee dimensies van wiskunde-onderwys).

Aan die ander kant, kan nuwe kragtige simboliese manipuleerders vir persoonlike rekenaars soos *Matematica*, *Theorist* of *Derive* sulke instrumentele manipulasie soos die transformasie van algebraïese vergelykings in dié artikel, met groot gemak hanteer. Met ander woorde, dit kan 'n mens bevry van blote roetine, vervelige en/of komplekse manipulasies, asook die gevaar om foute te maak, sodat 'n mens eerder op die konsepsuele aspekte daarvan kan fokus. Trouens, die skrywer is spyt dat hy nie so 'n program tot sy beskikking gehad het op die stadium toe hy die artikel aangepak het nie, aangesien dit hom baie onnodige moeite en tyd kon bespaar het!

Verwysings

Baart, L. (1992). Measuring the earth. *Pythagoras*, 28, 39-42.

- De Villiers, M.D. (1989). All cubic polynomials are point symmetric. *Imstusnews*, 19 (Nov), 15-16.
- De Villiers, M.D. (1990). All parabolas similar? Never! *Spectrum*, 28(2), 18-21.
- De Villiers, M.D. (1992). All cubic polynomials are affine equivalent. *Imstusnews*, 22, 3-5.
- De Villiers, M.D. (In press (a)). Transformations: a golden thread in school mathematics. *Spectrum*.
- Fishback, W.T. (1969). *Projective and Euclidean geometry*. New York: John Wiley.
- Pettofrezzo, A.J. (1966). *Matrices and transformations*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall.
- Skemp, R.R. (1976). Relational understanding and instrumental understanding. *Mathematics Teaching*, 77, 20-26.

"The philosophy of mathematics is in the midst of a Kuhnian revolution. For over two thousand years, mathematics has been dominated by an absolutist paradigm, which views it as a body of infallible and objective truth, far removed from the affairs and values of humanity. Currently this is being challenged by a growing number of philosophers and mathematicians, including Lakatos (1976), Davis and Hersh (1980) and Tymoczko (1986). Instead, they are affirming that mathematics is fallible, changing, and like any other body of knowledge, the product of human inventiveness.

This philosophical shift has a significance that goes far beyond mathematics. For mathematics is understood to be the most certain part of human knowledge, its cornerstone. If its certainty is questioned, the outcome may be that human beings have no certain knowledge at all. This would leave the human race spinning on their planet, in an obscure corner of the universe, with nothing but a few local myths for consolation. This vision of human insignificance may be too much, or rather too little, for some to bear. Does the last bastion of certainty have to be relinquished? In the modern age uncertainty has been sweeping through the humanities, ethics, the empirical sciences: is it now to overwhelm all our knowledge?

*However, in relinquishing the certainty of mathematics it may be that we are giving up the false security of the womb. It may be time to give up this protective myth. Perhaps human beings, like all creatures, are born into a world of wonders, an inexhaustible source of delight, which we will never fathom completely. These include the crystal worlds and rich and ornate webs which the human imagination weaves in mathematical thought. In these are infinite worlds beyond the infinite, and wondrous long and tight chains of reasoning. But it could be that such imaginings are part of what it means to be human, and not the certain truths we took them to be. Perhaps facing up to uncertainty is the next stage of maturity for the human race. Relinquishing myths of certainty may be the next act of decentration that human development requires." – Paul Ernst (1991:xi) in **The Philosophy of Mathematics Education**. London: The Falmer Press.*